FFT i ett historiskt perspektiv

I. Claesson
Dept of Signal Processing, University College of Karlskrona/Ronneby

Några nedslag i Fouriertransformens historia och FFT:ns ursprung från 1805 och framåt behandlas i denna populära betraktelse. Vi stannar upp ett slag hos Gauss, funderar över vad han gjort för oss ingenjörer och vi avslutar med en del praktiska konsekvenser och tips som är aktuella idag.

1 Inledning

I den mesta signalbehandlingslitteratur tillskrivs Cooley och Tukey upptäckten av FFT [1] (Fast Fourier Fransform) som är ett effektivt sätt att beräkna den Diskreta Fourier Transformen av samplade signalsekvenser av längd $N = N_1 N_2$. Emellertid har FFT upptäckts och återupptäckts flera gånger genom historien och idag anses det vara Gauss som stod för den första ursprungliga varianten [2].

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) var en pedantisk teoretiker och samtidigt en matematiker som hyllade verkligheten som inspirationens moder. För en god biografi och matematisk historieutbildning, se [3]. Han är utan tvivel en av de de matematiker som har haft störst inverkan på oss med teknisk intresse och många anser att han är den störste matematikern någonsin. Han var ytterst sparsam med att publicera sig. Han publicerde inte det mesta av sina arbeten utan höll dem antingen hemliga i sin telegramartade dagbok som först hittades 1898, eller dök hans arbeten upp i korrespondens med kollegor, som ofta bad honom publicera, nästan alltid förgäves. Naturligtvis ansåg han inte att FFT var något som var värt att publiceras!! Den offentliggjordes först 1866 [4], i ett samlingsverk som tog upp delar av hans opublicerade arbeten.

2 Historien om FFT

I sitt originalpapper från 1965 [1] refererar Cooley och Tukey till I. J. Good som huvudinfluens, men detta var mera en primfaktorsalgoritm (PFA). Emellertid hade Danielsson och Lanczos redan 1942 publicerat en algoritm som kunde ha varit den första FFT:n. De var i sin tur influerade av Runge (1856-1927) för sin algoritm, där Runge visar på att en fördubblingsalgoritm för beräkning av en 2N punkters Diskret Fourier Transform. Denna kunde erhållas med mindre beräkningsmöda ur 2 stycken N-punkters DFT. Därefter breder det historiska nätet bakåt ut sig enormt, men det visar sig att bl. a. Lord Kelvin (1827-1907) och George Howard Darwin, son till Charles, använt och känt till fördubblingsalgoritmen. Emellertid kom sanningen, åtminstone den nuvarande, i dagen i och med att Herman H. Goldstine i sitt arbete om den numeriska analysens historia skrev "This fascinating work of Gauss was neglected and was rediscovered by Cooley and Tukey in an important paper in 1965". Detta citat syftar på Gauss arbete [4], som publicerades postumt 1866. Gauss skrev på Latin och använde för oss ovana symboler som π, μ, ν, a, a' a'' etc. för heltal, vilket gjort hans arbete otillgängligt.

3 Gauss FFT

Vad vad det Gauss hade upptäckt?? Var det en FFT och, i så fall, vilken typ av FFT?? Förstod han att han reducerade beräkningsarbetet med den?? För det första använde Gauss en reell trigonometrisk DFT för sin harmoniska analys enligt formen

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos(2\pi kx) + \sum_{k=0}^{m} b_k \sin(2\pi kx) \tag{1}$$

där $m = (N-1)/2$ för udda N och $m = N/2$ för jämna N. Gauss visade att om vi har de samplade värdena $f(x_n)$, $x_n = n/N$, så ges a_k och b_k av de numera välkända uttrycken för DFT, f.ö. de äldsta kända uttrycken för DFT. Vidare fann Gauss att om man mäter N_1 sampel på $f(x)$, N_2 gånger med offset $1/N2$ av det ursprungliga sampelintervallet, så ger varje ny mätning annorlunda resultat. Genom att kombinera mätningarna upptäckte han att han kunde förbättra sina resultat och bestämma fourierkoefficienter för högre övertoner. I modern vokabulär var den ursprungliga funtionen undersamplad vilket ledde till vikningsdistorsion, som korrigerades med den finare indelningen.

Gauss bildade således en DFT med $N = N_1 N_2$ punkter som han fick ur N_2 stycken N_1 punkters DFT, var och en kompenserad med den extra fördröjning som offseten i tid gav (twiddle-faktorn). I modern terminologi, och med komplex notation, svarar detta precis mot Cooley-Tukeys algoritm, vilket var en Decimation-In-Frequency FFT.

Vad det gällde hans insikt om beräkningsbesparing citerar vi honom själv **"And so for this case, where most of the proposed values of the function, the number of values is composite $\pi = \mu\nu$, the method greatly reduces the tediousness of mechanical calculations, success will teach the one who tries it. Now the work can be extended still further, if the number μ would again be composite, each period can be subdivided into many lesser periods"**. Däremot gick inte Gauss så långt att han angav uttryck på beräkningsbördan av typ $N \log N$.

När utförde då Gauss detta arbete? Ja, enligt korrespondens med kollegor, så måste detta ha skett någon gång mellan 1805-1806, d.v.s. året innan Fouriers arbete på harmonisk analys!!!! Även om det idag står klart att Gauss verkligen var först, känns det ändå lite främmande att döpa om FFT till DGT-Diskreta Gauss Transformen, vilket har försökts på allvar.

4 Gauss och ingenjörskonst

Gauss, se Fig. 1, kallas för "prince of mathematicans"och ansåg att "mathematics is the queen of science" och "number theory is the queen of mathematics". Hans största matematiska gärning är att han bevisade och publicerade fem, ständigt förbättrade, bevis för algebrans fundamentalsats "Varje polynom med komplexa koefficienter av grad minst ett har minst en komplex rot". Vad kan en sådan matematiker haft för verklighetsförankring och påverkan för ingenjörer? Jo följande:

- Minsta-Kvadrat-Metoden, ett decennium innan Legendre.
- Komplexa talplanet som koncept
- Gaussfördelningen eller Gausspulsen
- Första telegrafen tillsammans med Weber
- Kvadratkomplettering

För att ytterligare befästa Gauss verklighetsförankring avslutar vi med ett par citat **"Thou, nature, art my goddess; to thy laws My sevices are bound"**, **"Wisdom oft is nearer when we stoop than when we soar"**.

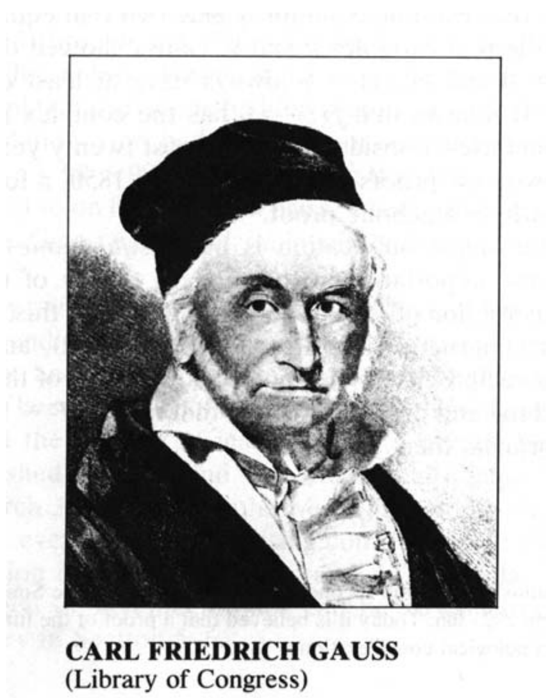

Figure 1: Gauss, 1777-1855

5 Gausspulsen och signalteori

Inom signalteori är det allmänt känt att en signal $s(t)$ kan inte vara koncentrerad i tid och frekvens samtidigt [5]. Detta teorem är känt som Heisenbers Osäkerhetsrelation och ges av

$$D_t D_\omega \geq \frac{1}{4} \tag{2}$$

där durationerna i tid D_t och i frekvens D_ω definieras av

$$D_t = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 s^2(t) dt \tag{3}$$

$$D_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S^2(\omega) d\omega \tag{4}$$

Observera spridningsmåttens likhet med vanlig varians. Här förutsätts att signalen $s(t)$ har centrerats runt noll samt att signalenergin är normerad till ett. Likhet inträffar för just gausspulsen

$$s(t) = \sqrt[4]{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2} \tag{5}$$

, dvs som fönster betraktat är detta det "bästa" i samtidig smalhet.

Problemet om vi vill använda Gausspulsen som fönster är att det har oändlig utsträckning i tid. Vilket är det fönster som under ändlig tid är så koncentrerat i frekvens som möjligt, dvs har en så stor andel av sin energi inom ett visst intervall $[0\ \omega_c]$ i frekvens? Slepian och Pollack löste detta problem via en integralekvation [5] och fick fram en "prolate spheriodal wave function" som gäller för kontinuerlig tid.

Vad händer om vi istället använder samplade signaler och fönstring. Ja oftast använder vi Uniform, Hanning eller något annat fönster, men vilket är det bästa? Jo, det visar sig att Kaiserfönstret är det fönster som maximerar energikoncentrationen. Egentligen fås detta fönster som en egenvektor till en matris (jfr integralekvationen i kontinuerlig tid), men Kaiser kom på en finurlig approximation med Besselfunktioner som ger en mycket enkel beräkning, jfr anropet `kaiser` i Matlab. Detta är ett fönster som används oförtjänt lite. Med en enda parameter väljer man huvudlobsbredd mot sidolobsundertryckning, och det finns praktiska applikationer där 180 dB undertryckning har designats med detta fönster.

References

[1] Cooley, J.W. and Tukey, J.W., "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series," Math. Comput., vol.19, no.2, pp.297-301, April 1965. Reprinted in Digital Signal Processing, L. R. Rabiner and C. M. Rader, Eds., pp.223-227, New York: IEEE Press, 1972.

[2] Heideman M.T., Johnson D.H., Burrus C.S. "Gauss and the History of the Fast Fourier Transform" IEEE ASSP Magazine, Oct. 1984.

[3] Eves H. "An Introduction to the History of Mathematics" Saunders College Publishing, 1953

[4] Gauss, C. F., "Nachlass: Theoria interpolationis methodo nova tractata," pp.265-303, in Carl Friedrich Gauss, Werke, Band 3, Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866.

[5] Papoulis A. "The Fourier Integral and its Applications" McGraw-Hill, 1962.